БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
Ханты-Мансийского автономного округа – Югры
«Сургутский государственный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по УМР
_____ Е.В. Коновалова
«21» 02 _____ 2017 г.

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА

Направление подготовки:
09.06.01 Информатика и вычислительная

Направленность программы:
05.13.18 –Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Отрасль науки:
Физико-математические науки

Квалификация:
Исследователь. Преподаватель-исследователь

Форма обучения:
Очная

Сургут, 2017г.

1. Общие положения.

Настоящая программа вступительного экзамена по дисциплине 05.13.18 Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ составлена в соответствии с федеральными государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования (уровень специалиста и магистра).

2. Цели вступительных испытаний

Целью вступительного экзамена по специальности «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» является определение уровня знаний, полученных поступающими в результате освоения образовательных программ высшего образования, их готовность к выполнению научно-исследовательской деятельности.

3. Содержание программы

Раздел 1. Общие вопросы.

Понятие модели. Вычислительный эксперимент. Модель, алгоритм, программа. Законы сохранения, как основа большинства математических моделей. Классификация моделей. Построение иерархии упрощённых моделей как метод анализа сложных систем. Изменчивость, наследственность, отбор – общие черты развивающихся систем. Глобальные модели, мировая динамика.

Раздел 2. Математическая физика.

Линейные уравнения. Классификация уравнений второго порядка. Уравнение переноса, волновые уравнения, уравнения эллиптического типа. Принцип суперпозиции. Уравнение теплопроводности. Краевая задача, принцип максимума, теоремы сравнения. Разложение по собственным функциям. Функция Грина и связь с интегральными уравнениями. Задача Коши. Волновые уравнения. Характеристики. Формула Даламбера. Корректность задач математической физики. Понятие о некорректных задачах и методах их анализа. Нелинейные уравнения. Уравнения газовой динамики. Автомодельные решения. Ударные волны. Понятие об обобщённых решениях. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. Самоорганизация. Понятие о параметрах порядка. Диссипативные структуры. Нелинейное уравнение теплопроводности. Нелинейные волны. Уравнение Бюргерса. Уравнение Кортвега де-Фриза. Солитоны. Представление о методе обратной задачи теории рассеяния.

Раздел 3. Элементы функционального анализа.

Банаховы и гильбертовы пространства. Полнота, компактность. Лемма Арцела. Понятие об интеграле Лебега. Теорема о неподвижной точке. Непрерывные и вполне непрерывные операторы. Приложение к теории линейных интегральных операторов. Альтернатива Фредгольма. Примеры задач, приводящих к интегральным уравнениям. Линейные функционалы. Распределения, обобщённые функции. Спектр оператора. Сопряжённые, самосопряжённые, симметричные, положительно определённые операторы и их спектральные свойства.

Раздел 4. Динамические системы.

Существование и единственность решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Устойчивость. Первый и второй методы Ляпунова. Диссипативные и гамильтоновы системы. Автоколебания. Понятие о методе усреднения. Генератор Ван-дер-Поля. Странные аттракторы. Система Лоренца. Одномерные отображения, как простейшие динамические системы. Простейшие дискретные модели. Клеточные автоматы. «Игра жизни».

Раздел 5. Теория вероятностей.

Вероятность, условная вероятность, математическое ожидание. Схема Бернулли. Одномерные и многомерные распределения вероятностей. Центральная предельная теорема. Модели Марковских процессов. Генерация случайных чисел. Метод Монте-Карло. Примеры математических моделей, которые могут быть изучены этим методом.

Раздел 6. Численные методы.

Численное интегрирование. Решение линейных алгебраических уравнений. Прямые и итерационные методы. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод оптимизации. Задача о минимизации квадратичного функционала. Градиентные методы. Вариационные методы и проекционные методы. Понятие о методе конечных элементов. Разностные методы решения уравнений математической физики. Явные и неявные схемы. Основные понятия (аппроксимация, сходимость, устойчивость). Теория устойчивости разностных схем. Консервативные разностные схемы. Разностные схемы для уравнения Пуассона, теплопроводности, переноса и волнового уравнения. Методы прогонки. Быстрое преобразование Фурье. Итерационные методы для решения разностных уравнений эллиптического типа. Численные методы решения нелинейных уравнений. Численные методы решения многомерных задач. Понятие о пакетах прикладных задач, особенностях программного обеспечения больших задач.

Раздел 6. Методы исследования операций и задачи искусственного интеллекта.

Управляемая система. Модель операции. Примеры задач исследования операций. Экспертизы и неформальные процедуры. Проблемы автоматизации проектирования. Искусственный интеллект. Задачи распознавания образов. Стратегическая компьютерная инициатива.

4. Перечень примерных вопросов

1. Элементы теории множеств. Операции над множествами. Несчетность множества действительных чисел. Множества на числовой прямой. Существование точных граней ограниченных множеств. Вещественные числа. Действия над вещественными числами. Точные грани ограниченных множеств вещественных чисел.
2. Критерии Коши сходимости последовательности. Сходимость монотонных последовательностей. Число «е».
3. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Верхний и нижний пределы последовательности.
4. Непрерывность функции в точке. Классификация точек разрыва. Теоремы Вейерштрасса и Кантора о непрерывных функциях на ограниченном отрезке.
5. Функции действительной переменной. Предельное значение функции в точке по Коши и Гейне. Критерий Коши существования предела.
6. Производная и дифференциал. Формулы для суммы, произведения и частного. Производная сложной функции и инвариантность формы первого дифференциала. Производные высших порядков.
7. Теоремы Дарбу, Роля, Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя.
8. Формула Тейлора. Формы остаточных членов. Разложения для элементарных функций. Символы «О» и «о».
9. Исследование графиков функций. Необходимые и достаточные условия экстремума. Точки перегиба, асимптоты.
10. Первообразная функции и неопределенный интеграл. Основные методы интегрирования. Интегрирование элементарных функций.
11. Определенный интеграл Римана. Критерий Дарбу интегрируемости по Риману. Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям.

12. Несобственный интеграл на полупрямой. Критерий Коши сходимости. Абсолютная и условная сходимость. Признаки сходимости. Главное значение. Несобственный интеграл от неограниченной функции.
13. Последовательности в Rn. Критерий Коши существования предела. Предельные точки множества. Открытые и замкнутые множества. Компакты. Теорема Больцано-Вейерштрасса.
14. Предел функции в точке из Rn. Повторные пределы. Непрерывность в точке. Теоремы Вейерштрасса и Кантора о непрерывных функциях на компактах из Rn.
15. Частные производные и дифференцируемость в точке из Rn. Производная сложной функции и инвариантность формы первого дифференциала в Rn. Производная по направлению. Градиент.
16. Экстремум функции. Необходимые условия экстремума в терминах первого дифференциала. Достаточные условия экстремума. Понятие об условном экстремуме. Градиентный метод поиска экстремума.
17. Числовые ряды. Критерий Коши сходимости рядов. Ряды с неотрицательными членами. Признаки сходимости Коши и Даламбера. Интегральный признак. Условная сходимость. Признаки Лейбница, Абеля и Дирихле.
18. Функциональные ряды. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости. Степенные ряды. Ряд Тейлора. Теорема о равномерном приближении функции многочленами. Теорема Арцела.
19. Двойные, тройные, n-кратные интегралы. Свойства их. Сведение кратных интегралов к повторным интегралам. Несобственные интегралы. Криволинейные интегралы первого и второго рода.
20. Поверхности в R_3. Способы задания. Касательная и нормаль. Кусочно-гладкие поверхности. Первая и вторая квадратичные формы поверхности. Поверхностные интегралы первого и второго рода.
21. Основные операции теории поля и их выражения в криволинейных координатах. Формулы Грина, Стокса, Гаусса-Остроградского и их приложения. Элементы тензорного анализа.
22. Интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность, интегрирование и дифференцирование по параметру. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Признаки равномерной сходимости.
23. Ряды Фурье. Неравенство Бесселя. Замкнутые и полные ортонормированные системы. Равенство Парсеваля. Ряды по тригонометрической системе. Ее замкнутость. Условия сходимости. Преобразование Фурье.
24. Мера Лебега на прямой и в R_n. Измеримые множества. Счетная аддитивность меры Лебега. Измеримые функции. Сходимость по мере и почти всюду.
25. Интеграл Лебега и его связь с интегралом Римана. Теоремы Леви, Фату и Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Пространства L_p. Интеграл Лебега-Стилтьеса.
26. Линейное пространство. Линейная зависимость векторов. Подпространства, линейные оболочки, гиперплоскости. Геометрические свойства совокупности решений систем линейных уравнений. Условия совместности общей системы линейных уравнений.
27. Линейные операторы. Ядро оператора. Инвариантные подпространства. Собственные значения и векторы. Преобразование матрицы линейного оператора при линейном преобразовании бизнеса. Теорема Гамильтона-Кели.
28. Линейные операторы в евклидовом пространстве. Сопряженные и самосопряженные операторы.
29. Норма линейного оператора в гильбертовом пространстве. Теорема Банаха-Штейнгауза. Сопряженный оператор. Спектр и резольвента линейного оператора.

30. Вполне непрерывные операторы. Интегральные операторы Гильберта-Шмидта. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений.
31. Вполне непрерывные самосопряженные операторы. Теорема Гильберта-Шмидта. Билинейная формула для ядра интегрального оператора Гильберта-Шмидта.
32. Обобщенные функции. Пространство основных функций. δ- функция. Дифференцирование обобщенных функций. преобразование Фурье обобщенных функций.
33. Гильбертово пространство. Теорема об ортогональной проекции. Ортонормированный базис. Теорема Рисса-Фишера. Теорема Рисса-Фреше о представлении линейного непрерывного функционала.
34. Нормированные пространства. Линейные операторы. Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного функционала. выпуклые множества и их отделимость.
35. Принцип сжатых отображений. примеры приложений к дифференциальным и интегральным уравнениям.
36. Метрические пространства. Теоремы Хаусдорфа о пополнении. Компактные и вполне ограниченные множества в метрическом пространстве. Критерии компактности в L_p.
37. Топологические пространства. База топологии. Непрерывные отображения. Гомеоморфизм. аксиомы отделимости Хаусдорфа. Компактность.
38. Метрические пространства. Непрерывные отображения метрических пространств. Гомеоморфизм. Компактные множества в метрическом пространстве.
39. Положительно определенные эрмитовы интегральные операторы. Экстремальный принцип. Теорема Мерсера.
40. Функция Грина для задачи Дирихле. Формула Пуассона для шара.
41. Основные свойства гармонических функций. Единственность и устойчивость классических решений краевых задач для уравнений Лапласа.
42. Уравнения теплопроводности и диффузии. решение основных краевых задач о распространении тепла.
43. Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Теоремы единственности и устойчивости.
44. Задача о колебании ограниченных объемов. решение методом Фурье. Свойства собственных значений и функций.
45. Задача о распространении волн в пространстве. Формула Пуассона. запаздывающий потенциал.
46. Уравнение гидродинамики и акустики.
47. Уравнение колебаний струны. Задача на бесконечной струне. Формула Даламбера. Корректность задачи на бесконечной струне. Пример Адамара некорректной задачи.
48. Классификация и приведение к каноническому виду уравнений второго порядка (случаи двух и нескольких переменных)
49. Задача на ограниченной струне. Обоснование метода Фурье. Теорема существования и единственности.
50. Общая задача Коши. Характеристики. Характеристики волнового уравнения.
51. Слабая топология и слабая сходимость. Слабая сходимость в нормированном пространстве. Слабая топология и слабая сходимость в сопряженном пространстве.
52. Сопряженное линейное пространство . Сильная и слабая топология в нем. рефлексивные пространства.
53. Понятие о проверке статистических гипотез. Случайные величины. Независимость. Математическое ожидание. Дисперсия. Сложение независимых случайных величин.
54. Неравенство Чебышева и его уточнения. Центральная предельная теорема (ЦПТ). Теорема Лапласа. Закон больших чисел. Применение ЦПТ к задаче различия гипотез и построению интервальных оценок.

55. Характеристические функции, их свойства и применение при доказательстве предельных теорем (ЗБЧ, ЦПТ). Теорема Пуассона.
56. Непрерывные распределения. Нормальное распределение. Гамма-распределение, его частные случаи.
57. Применение закона больших чисел и ЦПТ к оценке интегралов и вероятности события «А».
58. Аксиоматика теории вероятностей. Теоремы о продолжении меры. Леммы Бореля-Кантели. Усиленный закон больших чисел.
59. Простейшие случайные процессы. Пуассоновский процесс. Винеровский процесс. Марковские процессы, составление переходных вероятностей в процессе массового обслуживания.
60. Методы статистического описания. Статистические решения. Последовательный анализ. Точечные и интервальные оценки. Регрессионный анализ и метод наименьших квадратов.
61. Функции комплексной переменной. Аналитические функции. Ряды Тейлора и Лорана. Интеграл Коши. Аналитическое продолжение.
62. Приведение квадратической формы к каноническому виду. Закон инерции. Критерий Сильвестра. Билинейные и квадратические формы в евклидовом пространстве.
63. Системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Определитель Вронского. решение в случае постоянных коэффициентов. Метод вариации постоянных.
64. Теория устойчивости. Простейшие точки покоя. Устойчивость по Ляпунову. Теоремы Ляпунова об устойчивости.

5. Рекомендованная литература:

а) **основная литература:**

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
2. Колмогоров А. Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — 7-е изд. — М.: Физматлит, 2006. — 570 с.
3. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — 5-е изд. — М.: Наука, 1982. — 331с.: ил.
4. Андронов А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин; Перераб. и доп. Н. А. Железцова .— 2-е изд. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959. — 915с.
5. Бабаков И. М. Теория колебаний. — Изд. 4-е, испр. — М.: Дрофа, 2004. — 592 с. : ил., табл.
6. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. — Изд. 4-е, стер. — СПб. [и др.]: Лань, 2009. — 608 с.
7. Ясницкий Л. Н. Введение в искусственный интеллект. — 3-е изд., стер. — М.: Академия, 2010. — 174, [1] с.: ил.

б) **дополнительная литература**:

8. Самарский А.А. Современная прикладная математика и вычислительный эксперимент. Коммунист, 1983, № 18. Неизбежность новой методологии. Коммунист, 1989, №1.
9. Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент. – М.: Наука, 1988.
10. Краснощеков П.С., Петров А.А. Принципы построения моделей. – М.: МГУ, 1984.
11. Моисеев Н.Н., Алгоритмы развития. – М.: Наука, 1981.
12. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: МГУ,

1999.
13. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977.
14. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. – М.: Наука, 1980.
15. Розанов Ю.А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. – М.: Наука, 1989.
16. Самарский А. А. Введение в численные методы. — 3-е изд., перераб. — М.: Наука, 1997. — 239с.
17. Йордан Э. Структурное программирование и проектирование программ. – М.: Мир, 1979.

Зав. кафедрой прикладной математики,
канд. физ-мат. наук, доцент А.В. Гореликов