

**ПРОГРАММА КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА****Приложение к рабочей программе по дисциплине Математическая физика,  
направленной на подготовку к сдаче кандидатских экзаменов****1. Общие положения**

Организация и проведение кандидатских экзаменов регламентируется Положением о подготовке научно-педагогических и научных кадров в системе послевузовского профессионального образования в Российской Федерации, утвержденным приказом Минобрнауки России от 27.03.98 №814 (зарегистрирован Минюстом России 05.08.98, рег. №1582), приказом Минобрнауки РФ от 08 октября 2007 г. N274 «Об утверждении программ кандидатских экзаменов». Кандидатские экзамены являются составной частью аттестации научных и научно-педагогических кадров.

Результаты экзамена оцениваются как «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

**2. Цель кандидатского экзамена**

Цель экзамена - установить глубину профессиональных знаний соискателя ученой степени, уровень подготовленности к самостоятельной научно-исследовательской работе.

Сдача кандидатских экзаменов обязательна для присуждения ученой степени кандидата наук.

**3. Содержание программы***Раздел 1. Математический и функциональный анализ*

Мера и измеримые функции. Интеграл Лебега и его сравнение с интегралом Римана. Теорема Егорова. Теорема Фубини. Теоремы Лебега, Леви, Фату о предельном переходе под знаком интеграла. Пространства  $L_p$ . Разложения по ортогональным системам функций в  $L_2$ . Ряды и преобразования Фурье. Теорема Планшереля. Метрические и топологические пространства. Компактность. Непрерывные функции на компакте. Теорема Стоуна-Вейерштрасса. Связность. Линейные топологические и банаховы пространства. Теорема Хана-Банаха. Компактные операторы. Гильбертовы пространства. Теорема Рисса-Фишера о представлении линейных функционалов. Линейные операторы в гильбертовом пространстве. Ограниченные операторы. Понятие о спектре оператора. Спектр компактного самосопряженного оператора. Спектральное представление линейного оператора. Линейные операторы и их матрицы в конечномерном вещественном и комплексном пространстве. Нормальная форма матрицы линейного оператора. Канонический вид матрицы симметрического, унитарного и кососимметрического оператора. Обобщенные функции и операции над ними. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста. Соболевские пространства  $H_s$ . Теорема вложения Соболева.

*Раздел 2. Комплексный анализ*

Теорема Коши. Интегральная формула Коши. Лемма Шварца и принцип максимума модуля. Разложение голоморфных функций в ряды Тейлора и Лорана. Характеристика изолированных особых точек в терминах ряда Лорана. Нули голоморфных функций. Теорема единственности. Принцип аргумента и теорема Руше. Теорема Коши о вычетах. Целые функции. Теорема Лиувилля. Принцип сохранения области и теорема Гурвица. Принцип соответствия границ. Теорема Римана. Аналитическое продолжение. Теорема о

монодромии. Точки ветвления аналитических функций. Римановы поверхности. Принцип симметрии. Теорема Пикара.

### *Раздел 3. Дифференциальные уравнения*

Линейные дифференциальные уравнения и системы. Фундаментальные системы решений. Метод вариации постоянных. Дифференциальные уравнения и системы с постоянными коэффициентами. Квазиполиномы. Общие и частные решения. Функция Грина. Устойчивость по Ляпунову. Функция Ляпунова. Асимптотическая устойчивость. Элементы вариационного исчисления. Лагранжиан и уравнения Эйлера-Лагранжа. Гамильтониан и уравнения Гамильтона. Принцип максимума Понтрягина. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений. Теорема Гильберта-Шмидта. Характеристики уравнений в частных производных. Задача Коши и теорема Коши-Ковалевской. Классификация уравнений в частных производных. Метод разделения переменных. Уравнение Лапласа и эллиптические уравнения. Гармонические функции. Принцип максимума. Фундаментальное решение. Задачи на собственные значения и разложения по собственным функциям. Уравнение теплопроводности и параболические уравнения. Фундаментальное решение. Задача Коши. Принцип максимума и теорема единственности. Волновое уравнение и гиперболические уравнения. Фундаментальное решение. Задача Коши.

### *Раздел 4. Алгебра и топология*

Группы, алгебры и кольца. Свободные группы и соотношения. Нетеровы кольца и модули. Теорема Гильберта о базисе. Поля и их алгебраические расширения. Поле разложения многочлена. Основная теорема теории Галуа. Группы и алгебры Ли. Основные типы алгебр Ли. Линейные представления групп и их характеры. Лемма Шура. Индуцированные представления. Закон взаимности Фробениуса. Фундаментальная группа. Односвязность. Накрытия. Лемма о накрывающей гомотопии. Универсальное накрытие. Гомологии и когомологии симплицальных комплексов. Их гомотопическая инвариантность. Группы гомологий и фундаментальная группа компактных двумерных поверхностей, их классификация. Локально тривиальные и векторные расслоения. Пространства путей и петель. Точная гомотопическая последовательность расслоения. Расслоение Хопфа и классификация отображений 3-мерной сферы в 2-мерную. Степень отображения и индекс особой точки векторного поля. Индекс пересечения и коэффициент зацепления. Эйлера характеристика.

### *Раздел 5. Алгебра и топология*

Гладкие многообразия и их отображения. Дифференциал гладкого отображения и его якобиан. Теорема Сарда. Касательные векторы и касательное расслоение. Примеры гладких многообразий: проективные пространства, матричные группы Ли, многообразия Грассмана и Штифеля. Тензоры и тензорные поля. Дифференциальные формы и внешнее дифференцирование. Когомологии де Рама. Тензоры и дифференциальные формы на комплексных многообразиях. Интегрирование дифференциальных форм. Теорема Стокса. Ее связь с формулами Грина и Гаусса-Остроградского. Двойственность Пуанкаре. Римановы многообразия и метрики. Геодезические. Связности, их тензоры кривизны и кручения. Параллельный перенос. Гладкие кривые, их кривизна и кручение. Формулы Френе. Первая и вторая квадратичные формы поверхности. Теорема Менье и формула Эйлера. Главные направления и кривизны. Формула Гаусса-Бонне. Симплектические многообразия. Теорема Дарбу. Комплексная и контактная структуры.

### *Раздел 6. Теория вероятностей*

Вероятностные пространства. Случайные величины и их математические ожидания. Дисперсия. Независимые случайные величины. Условные вероятности и математические ожидания. Нормальное распределение и распределение Пуассона. Характеристические функции. Теорема Бохнера-Хинчина. Центральная предельная теорема. Законы больших чисел. Корреляционные функции. Цепи Маркова и марковские случайные процессы. Гауссовские процессы и процесс Пуассона. Броуновское движение. Стохастический

дифференциал и формула Ито. Стохастические дифференциальные уравнения. Элементы математической статистики. Точечное и интервальное оценивание. Задача проверки статистических гипотез.

#### *Раздел 7. Механика*

Уравнения движения. Принцип наименьшего действия. Функция Лагранжа. Теорема Нетер и законы сохранения. Одномерное движение. Движение в центральном поле. Свободные и вынужденные колебания. Колебания при наличии трения. Движение твердого тела. Угловая скорость, моменты инерции и количества движения. Уравнения Эйлера. Уравнения Гамильтона. Скобки Пуассона. Теорема Лиувилля. Уравнение Гамильтона-Якоби.

#### *Раздел 8. Теория поля*

Принцип относительности. Преобразования Лоренца. Интервал. Релятивистская механика. Принцип наименьшего действия. Энергия и импульс. Заряд в электромагнитном поле. Четырехмерный потенциал. Калибровочные преобразования. Уравнения движения заряда. Тензор электромагнитного поля. Уравнения электромагнитного поля. Действие электромагнитного поля. Тензор энергии-импульса. Постоянное электромагнитное поле. Закон Кулона. Электростатическая энергия заряда. Диполь. Магнитный момент. Теорема Лармора. Система зарядов в электромагнитном поле. Электромагнитные волны. Волновое уравнение. Плоские и монохроматические волны. Спектральное разложение. Распространение электромагнитных волн. Отражение и преломление. Принцип взаимности. Поле движущегося заряда. Запаздывающие потенциалы и потенциалы Льенара-Вихерта. Излучение электромагнитных волн. Поле системы зарядов на больших расстояниях.

#### *Раздел 9. Механика и электродинамика сплошных сред*

Уравнения движения идеальной жидкости (уравнения непрерывности, уравнение Эйлера). Уравнения движения вязкой жидкости. Диссипация энергии в несжимаемой жидкости. Система уравнений Навье-Стокса. Звук и звуковые волны. Электростатика проводников. Электростатика диэлектриков. Диэлектрическая проницаемость. Постоянный ток. Плотность тока и проводимость. Постоянное магнитное поле. Магнитное поле постоянного тока. Сверхпроводники. Эффект Мейснера. Сверхпроводящий ток. Критическое поле. Куперовские пары. Уравнения Гинзбурга-Ландау.

#### *Раздел 10. Теория твердого тела*

Типы и симметрии кристаллов. Свойства обратной решетки. Зона Бриллюэна. Теорема Блоха. Колебания решетки. Фононы. Фактор Дебая-Уоллера. Ангармонизм и тепловое расширение. Зонная структура. Квазичастицы. Электронная теплоемкость. Кинетическое уравнение. Решеточное сопротивление. Увлечение фононов. Эффект Холла. Поверхность Ферми. Диамагнитный и циклотронный резонанс. Открытые орбиты. Квантование орбит. Эффект де Гааза-ван Альфена.

#### *Раздел 11. Квантовая механика*

Основные положения квантовой механики. Принцип неопределенности и принцип суперпозиции. Квантовомеханическое описание системы. Квантование. Представление Фока. Координатное и импульсное представления. Операторы энергии и импульса. Гамильтониан. Уравнение Гейзенберга. Соотношение неопределенности. Уравнение Шредингера. Одномерное движение и одномерный осциллятор. Потенциальная яма. Прохождение через барьер. Движение в центральном поле. Атом водорода. Разложение плоской волны. Уравнение Дирака. Спин. Тожественность частиц и принцип неразличимости. Связь спина со статистикой. Бозоны и фермионы. Атом. Состояния электронов и уровни энергии. Тонкая структура атомных уровней. Периодическая система Менделеева. Квазиклассическое приближение. Модель Томаса-Ферми. Движение в магнитном поле. Уравнение Шредингера в электрическом и магнитном полях. Плотность потока. Квантовая теория рассеяния. Матрица рассеяния. Формула Бора. Резонансное рассеяние. Упругое рассеяние. Формула Брейта-Вигнера.

## Раздел 12. Статистическая физика

Основные принципы статистики. Статистическое распределение и статистическая независимость. Теория Лиувилля. Энтропия. Закон возрастания энтропии. Термодинамические величины: температура, давление. Адиабатический процесс. Работа и количество теплоты, термодинамический потенциал. Принцип Ле-Шателье, теорема Нернста. Распределение Гиббса. Свободная энергия. Термодинамические соотношения. Термодинамика идеальных газов. Распределение Больцмана. Неравновесный идеальный газ. Свободная энергия и уравнение состояния. Закон равнораспределения. Одноатомный идеальный газ. Распределения Бозе и Ферми. Равновесие фаз. Формула Клапейрона-Клаузиуса. Критическая точка. Флуктуации. Распределение Гиббса. Формула Пуассона. Фазовые переходы второго рода.

### 4. Перечень примерных вопросов

1. Мера и измеримые функции. Интеграл Лебега и его сравнение с интегралом Римана. Теорема Егорова. Теорема Фубини. Теоремы Лебега, Леви, Фату о предельном переходе под знаком интеграла.
2. Пространства  $L_p$ . Разложения по ортогональным системам функций в  $L_2$ . Ряды и преобразования Фурье. Теорема Планшереля.
3. Метрические и топологические пространства. Компактность. Непрерывные функции на компакте. Теорема Стоуна-Вейерштрасса. Связность.
4. Линейные топологические и банаховы пространства. Теорема Хана-Банаха. Компактные операторы.
5. Гильбертовы пространства. Теорема Рисса-Фишера о представлении линейных функционалов.
6. Линейные операторы в гильбертовом пространстве. Ограниченные операторы. Понятие о спектре оператора. Спектр компактного самосопряженного оператора. Спектральное представление линейного оператора.
7. Линейные операторы и их матрицы в конечномерном вещественном и комплексном пространстве. Нормальная форма матрицы линейного оператора. Канонический вид матрицы симметрического, унитарного и кососимметрического оператора.
8. Обобщенные функции и операции над ними. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста. Соболевские пространства  $H_s$ . Теорема вложения Соболева.
9. Теорема Коши. Интегральная формула Коши. Лемма Шварца и принцип максимума модуля.
10. Разложение голоморфных функций в ряды Тейлора и Лорана. Характеристика изолированных особых точек в терминах ряда Лорана.
11. Нули голоморфных функций. Теорема единственности. Принцип аргумента и теорема Руше.
12. Теорема Коши о вычетах. Целые функции. Теорема Лиувилля.
13. Принцип сохранения области и теорема Гурвица. Принцип соответствия границ. Теорема Римана.
14. Аналитическое продолжение. Теорема о монодромии. Точки ветвления аналитических функций. Римановы поверхности.
15. Принцип симметрии. Теорема Пикара.
16. Линейные дифференциальные уравнения и системы. Фундаментальные системы решений. Метод вариации постоянных.
17. Дифференциальные уравнения и системы с постоянными коэффициентами. Квазиполиномы. Общие и частные решения. Функция Грина.

18. Устойчивость по Ляпунову. Функция Ляпунова. Асимптотическая устойчивость.
19. Элементы вариационного исчисления. Лагранжиан и уравнения Эйлера-Лагранжа. Гамильтониан и уравнения Гамильтона.
20. Принцип максимума Понтрягина.
21. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений. Теорема Гильберта-Шмидта.
22. Характеристики уравнений в частных производных. Задача Коши и теорема Коши-Ковалевской. Классификация уравнений в частных производных. Метод разделения переменных.
23. Уравнение Лапласа и эллиптические уравнения. Гармонические функции. Принцип максимума. Фундаментальное решение. Задачи на собственные значения и разложения по собственным функциям.
24. Уравнение теплопроводности и параболические уравнения. Фундаментальное решение. Задача Коши. Принцип максимума и теорема единственности.
25. Волновое уравнение и гиперболические уравнения. Фундаментальное решение. Задача Коши.
26. Группы, алгебры и кольца. Свободные группы и соотношения.
27. Нетеровы кольца и модули. Теорема Гильберта о базисе.
28. Поля и их алгебраические расширения. Поле разложения многочлена. Основная теорема теории Галуа.
29. Группы и алгебры Ли. Основные типы алгебр Ли.
30. Линейные представления групп и их характеры. Лемма Шура. Индуцированные представления. Закон взаимности Фробениуса.
31. Фундаментальная группа. Односвязность. Накрытия. Лемма о накрывающей гомотопии. Универсальное накрытие.
32. Гомологии и когомологии симплициальных комплексов. Их гомотопическая инвариантность. Группы гомологий и фундаментальная группа компактных двумерных поверхностей, их классификация.
33. Локально тривиальные и векторные расслоения. Пространства путей и петель. Точная гомотопическая последовательность расслоения. Расслоение Хопфа и классификация отображений 3-мерной сферы в 2-мерную.
34. Степень отображения и индекс особой точки векторного поля. Индекс пересечения и коэффициент зацепления. Эйлера характеристика.
35. Гладкие многообразия и их отображения. Дифференциал гладкого отображения и его якобиан. Теорема Сарда. Касательные векторы и касательное расслоение.
36. Примеры гладких многообразий: проективные пространства, матричные группы Ли, многообразия Грассмана и Штифеля.
37. Тензоры и тензорные поля. Дифференциальные формы и внешнее дифференцирование. Когомологии де Рама. Тензоры и дифференциальные формы на комплексных многообразиях.
38. Интегрирование дифференциальных форм. Теорема Стокса. Ее связь с формулами Грина и Гаусса-Остроградского. Двойственность Пуанкаре.
39. Римановы многообразия и метрики. Геодезические. Связности, их тензоры кривизны и кручения. Параллельный перенос.
40. Гладкие кривые, их кривизна и кручение. Формулы Френе.
41. Первая и вторая квадратичные формы поверхности. Теорема Менье и формула Эйлера. Главные направления и кривизны. Формула Гаусса-Бонне.
42. Симплектические многообразия. Теорема Дарбу. Комплексная и контактная структуры.

43. Вероятностные пространства. Случайные величины и их математические ожидания. Дисперсия. Независимые случайные величины. Условные вероятности и математические ожидания.
44. Нормальное распределение и распределение Пуассона. Характеристические функции. Теорема Бохнера-Хинчина. Центральная предельная теорема. Законы больших чисел.
45. Корреляционные функции. Цепи Маркова и марковские случайные процессы. Гауссовские процессы и процесс Пуассона.
46. Броуновское движение. Стохастический дифференциал и формула Ито. Стохастические дифференциальные уравнения.
47. Элементы математической статистики. Точечное и интервальное оценивание. Задача проверки статистических гипотез.
48. Уравнения движения. Принцип наименьшего действия. Функция Лагранжа. Теорема Нетер и законы сохранения.
49. Одномерное движение. Движение в центральном поле.
50. Свободные и вынужденные колебания. Колебания при наличии трения.
51. Движение твердого тела. Угловая скорость, моменты инерции и количества движения. Уравнения Эйлера.
52. Уравнения Гамильтона. Скобки Пуассона. Теорема Лиувилля. Уравнение Гамильтона-Якоби.
53. Принцип относительности. Преобразования Лоренца. Интервал.
54. Релятивистская механика. Принцип наименьшего действия. Энергия и импульс.
55. Заряд в электромагнитном поле. Четырехмерный потенциал. Калибровочные преобразования. Уравнения движения заряда. Тензор электромагнитного поля.
56. Уравнения электромагнитного поля. Действие электромагнитного поля. Тензор энергии-импульса.
57. Постоянное электромагнитное поле. Закон Кулона. Электростатическая энергия заряда. Диполь. Магнитный момент. Теорема Лармора. Система зарядов в электромагнитном поле.
58. Электромагнитные волны. Волновое уравнение. Плоские и монохроматические волны. Спектральное разложение.
59. Распространение электромагнитных волн. Отражение и преломление. Принцип взаимности.
60. Поле движущегося заряда. Запаздывающие потенциалы и потенциалы Льенара-Вихерта. Излучение электромагнитных волн.
61. Поле системы зарядов на далеких расстояниях.
62. Уравнения движения идеальной жидкости (уравнения непрерывности, уравнение Эйлера).
63. Уравнения движения вязкой жидкости. Диссипация энергии в несжимаемой жидкости. Система уравнений Навье-Стокса.
  - i. Звук и звуковые волны.
64. Электростатика проводников.
65. Электростатика диэлектриков. Диэлектрическая проницаемость.
66. Постоянный ток. Плотность тока и проводимость.
67. Постоянное магнитное поле. Магнитное поле постоянного тока.
68. Сверхпроводники. Эффект Мейснера. Сверхпроводящий ток. Критическое поле. Куперовские пары. Уравнения Гинзбурга-Ландау.
69. Типы и симметрии кристаллов. Свойства обратной решетки. Зона Бриллюэна. Теорема Блоха.
70. Колебания решетки. Фононы. Фактор Дебая-Уоллера. Ангармонизм и тепловое расширение.

71. Зонная структура. Квазичастицы. Электронная теплоемкость.
72. Кинетическое уравнение. Решеточное сопротивление. Увлечение фононов. Эффект Холла.
73. Поверхность Ферми. Диамагнитный и циклотронный резонанс. Открытые орбиты. Квантование орбит. Эффект де Гааза-ван Альфена.
74. Основные положения квантовой механики. Принцип неопределенности и принцип суперпозиции. Квантовомеханическое описание системы.
75. Квантование. Представление Фока. Координатное и импульсное представления.
76. Операторы энергии и импульса. Гамильтониан. Уравнение Гейзенберга. Соотношение неопределенности.
77. Уравнение Шредингера. Одномерное движение и одномерный осциллятор. Потенциальная яма. Прохождение через барьер.
78. Движение в центральном поле. Атом водорода. Разложение плоской волны.
79. Уравнение Дирака. Спин
80. Тождественность частиц и принцип неразличимости. Связь спина со статистикой. Бозоны и фермионы.
81. Атом. Состояния электронов и уровни энергии. Тонкая структура атомных уровней. Периодическая система Менделеева.
82. Квазиклассическое приближение. Модель Томаса-Ферми.
83. Движение в магнитном поле. Уравнение Шредингера в электрическом и магнитном полях. Плотность потока.
84. Квантовая теория рассеяния. Матрица рассеяния. Формула Бора. Резонансное рассеяние. Упругое рассеяние. Формула Брейта-Вигнера.
85. Основные принципы статистики. Статистическое распределение и статистическая независимость. Теория Лиувилля. Энтропия. Закон возрастания энтропии.
86. Термодинамические величины: температура, давление. Адиабатический процесс. Работа и количество теплоты, термодинамический потенциал. Принцип Ле-Шателье, теорема Нернста.
87. Распределение Гиббса. Свободная энергия. Термодинамические соотношения.
88. Термодинамика идеальных газов. Распределение Больцмана. Неравновесный идеальный газ. Свободная энергия и уравнение состояния. Закон равнораспределения. Одноатомный идеальный газ.
89. Распределения Бозе и Ферми.
90. Равновесие фаз. Формула Клапейрона-Клаузиуса. Критическая точка.
91. Флуктуации. Распределение Гиббса. Формула Пуассона.
92. Фазовые переходы второго рода.